《概率论第四章复习题》 答案

一、选择题:

B D D B C C D D B C A B D C B

二、填空题:

(1)0.4073($5(1-0.9^5-0.5\times0.9^4)$); (2). 1，4 ； (3). 0 ； (4). $\frac{11}{144}$ ；

(5). （1，3）； (6)$\sqrt{2}$； (7). 5； .(8) .6； (9).$\frac{8}{9}$ ； (10).$\frac{1}{12}$； (11)0.92 ； (12) .μ

三、计算题:

1.设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0	0.3	0.1

(1) 求$E(X),E(Y)$； (2) 设$Z=(X-Y)^2$，求$E(Z),D(Z)$.

解: (1)由(X,Y)的联合分布律容易得边缘分布

$X \backslash Y$	-1	0	1	$P(X=x_i)$
1	0.2	0.1	0.1	0.4
2	0.1	0	0.1	0.2
3	0	0.3	0.1	0.4
$P(Y=y_j)$	0.3	0.4	0.3	

$E(X)=1\times0.4+2\times0.2+3\times0.4=2$.

$E(Y)=-1\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0$.

(2) 因为

p_k	0.2	0.1	0.1	0.1	0	0.1	0	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,0)	(2,1)	(3,−1)	(3,0)	(3,1)
$Z=(X-Y)^2$	4	1	0	9	4	1	16	9	4

Z 的分布律为

Z	0	1	4	9
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

$E(Z)=1\times0.2+4\times0.3+9\times0.4=5$.

$E(Z^2)=1\times0.2+16\times0.3+81\times0.4=37.4$

$D(Z)=E(Z^2)-E^2(X)=37.4-25=12.4$

2. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

又 $E(X)=0.5$， $D(X)=0.15$，求 a, b, c.

解：由密度函数的归一性可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^1 (ax^2+bx+c)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=1,$$

又因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_0^1 x(ax^2+bx+c)dx=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0.5,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2(ax^2+bx+c)dx=\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}=D(X)+[E(X)]^2=0.4,$$

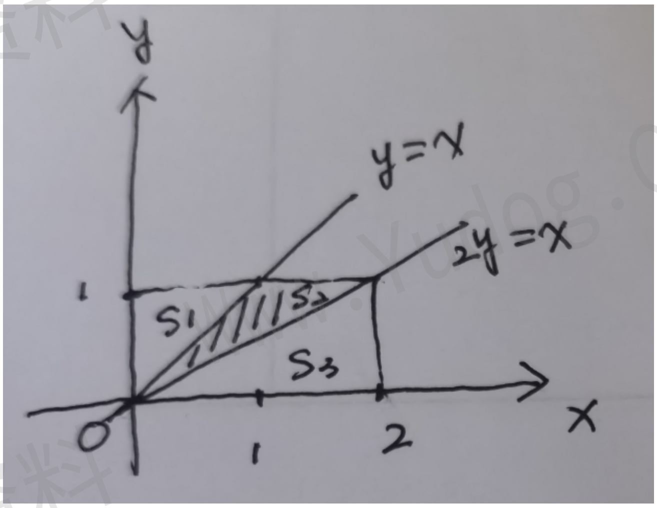
解得： $a=12, b=-12, c=3$.

3. 假设二维随机变量（X，Y）在区域 G={（x，y）|0≤x≤2,0≤y≤1}上服从均匀分布．记

$$U=\begin{cases} 0 & X\le Y \\ 1 & X>Y \end{cases} \qquad V=\begin{cases} 0 & X\le 2Y \\ 1 & X>2Y \end{cases}$$

求：（1）(U,V) 的联合分布，（2） ρ_{UV}

解：区域 G 的面积 $S=2$, 故 $f(x,y)=\begin{cases} 1/2 & (x,y)\in G \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$



$$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\frac{S_1}{S}=\frac{1}{4}$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0$$

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y,X>2Y\}=P\{X>2Y\}=\frac{S_3}{S}=\frac{1}{2}$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{\frac{X}{2}\le Y<X\}=\frac{S_2}{S}=\frac{1}{4}$$

V \ U	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$

$E(U)=\frac{3}{4},E(U^2)=\frac{3}{4},D(U)=E(U^2)-E^2(U)=\frac{3}{16}$

$E(V)=\frac{1}{2},E(V^2)=\frac{1}{2},D(V)=E(V^2)-E^2(V)=\frac{1}{4}$

$E(UV)=\frac{1}{2}$，　$Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{8}$

$$\rho_{UV_2}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)D(V)}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4.设某商店经销某种商品，其每周的需求量 X 是一个随机变量，它在[10，30]上服从均匀分布。且进货量为区间[10，30]上的某一整数。若每售出一单位商品，可获利 500 元，若销售不出而积压，则每单位商品需保养费 100 元。若供不应求，则从外部调剂供应，此时每售出一单位商品获利 300 元。问应组织多少货源，才能使平均收益最大？

解：设 Y 表示平均收益，每周进货量为 a

$$Y=g(x)=\begin{cases}500x-100(a-x) & 10\le x\le a\\ 500a+300(x-a) & a<x\le 30\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20} & 10\le x\le 30\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{10}^{a}(600x-100a)\frac{1}{20}dx+\int_{a}^{30}(300x+200a)\frac{1}{20}dx$$

$$=5250+350a-7.5a^2$$

$$(5250+350a-7.5a^2)'=350-15a=0$$

$$a\approx 23$$

故进货量为 23 时，平均收益最大

5.有一批建筑房屋用的木柱，其中 80%的长度不小于 3m. 现从这批木柱中随机取出 100 根,问其中至少有 30 根短于 3m 的概率是多少？ （$\Phi(2.5)=0.9938$ ）

解：设 100 根中有 X 根短于 3m，则 $X\sim B(100,0.2)$，

由棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理可知， $X\sim N(20,16)$（近似）.

$$P\{X\ge 30\}=1-P\{X<30\}\approx 1-P\left\{\frac{X-20}{\sqrt{16}}<\frac{30-20}{\sqrt{16}}\right\}=1-\Phi(2.5)$$

$$=1-0.9938=0.0062.$$

6.现有两个箱子,装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品，从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求:

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率 .

解：(1) X 的可能取值为 0，1，2，3，X 的概率分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_3^kC_3^{3-k}}{C_6^3},\quad k=0,1,2,3.$$

即

X	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此

$$E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}.$$

(2) 设 A 表示事件“从乙箱中任取一件产品是次品”，由于$\{X=0\}$，$\{X=1\}$，$\{X=2\}$，$\{X=3\}$

构成完备事件组，因此根据全概率公式，有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A|X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\cdot\frac{k}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}kP\{X=k\}$$

$$=\frac{1}{6}E(X)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{4}.$$

四：证明题

1\. 设 X 是随机变量且 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，证明对任意常数 c，$E[(X-c)^2]\geq E[(X-\mu)^2]$

证明：$D(X)=E(X^2)-E^2(X)\Rightarrow E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$

$$E[(X-C)^2]=E(X^2-2CX+C^2)=E(X^2)-2CE(X)+C^2$$

$$=\sigma^2+(\mu-C)^2$$

$$E[(X-\mu)^2]=E(X^2-2\mu X+\mu^2)=E(X^2)-2\mu E(X)+\mu^2=\sigma^2$$

$$E[(X-c)^2]\geq E[(X-\mu)^2]$$

2\. 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leq 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立

证明：$E(X)=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x/\pi\, dydx=\int_{-1}^{1}2x\sqrt{1-x^2}/\pi dx=0$

$$E(XY)=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xy/\pi\, dydx=\int_{-1}^{1}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}y\cdot\frac{1}{\pi}dydx=0$$

所以 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，$\rho_{XY}=0$，即 X 和 Y 是不相关

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}1/\pi\, dy, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}1/\pi\, dx, & -1<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当 $x^2+y^2\le 1$ 时， $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$,所以 X 和 Y 不是相互独立